SPAZIO VETTORIALE

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V con due operazioni:

- '+': associa ad una coppia di vettori (v, w) un altro vettore, detto somma $v + w$;
- '·': che associa ad uno scalare λ e un vettore v, un vettore detto prodotto λv.

Queste due operazioni verificano otto proprietà:

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

① PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA SOMMA

$\forall v, w \in V \Rightarrow v + w = w + v$

② PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA SOMMA

$\forall v, w, u \in V \Rightarrow (v + w) + u = v + (w + u)$

③ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO (rispetto alla somma tra vettori)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V \Rightarrow \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

④ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO (rispetto alla somma tra scalari)

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

⑤ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V \Rightarrow (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$

⑥ ELEMENTO NEUTRO PER LA SOMMA (esistenza dello zero)

$\exists\, 0 \in V, \forall v \in V \Rightarrow 0 + v = v$

⑦ ELEMENTO INVERSO PER LA SOMMA (esistenza dell'opposto)

$\forall v \in V, \exists (-v) \Rightarrow v + (-v) = 0$

⑧ ELEMENTO NEUTRO PER IL PRODOTTO

$\forall v \in V \Rightarrow 1 \cdot v = v$

Queste proprietà sono vere sia per il piano che per lo spazio cartesiano.

Esempi

- Spazio $\mathbb{R}^n$
- Spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$
- Spazio delle matrici $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

MATRICI

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\quad$ $m \times n$ = taglia della matrice

posto $(i, j) \Rightarrow (A)_{ij}$ = coefficiente di riga i-esima e colonna j-esima.

$(A)_{ij} + (B)_{ij} = (A + B)_{ij}$

$\lambda (A)_{ij} = (\lambda A)_{ij}$

- la somma tra matrici è definita solo per matrici aventi la stessa taglia.
- l'insieme delle matrici è uno spazio vettoriale ($\mathcal{M}_{m \times n}$).

Prodotto tra matrici

bisogna specificare se è AB o BA perché:

colonne di A = # righe B

$$(a_1\ a_2 \dots a_m)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m$$

$1\times m$ $\quad m\times 1$ $\quad 1\times 1$

$$\sum_{p=1}^{k} (A)_{ip}\cdot(B)_{pj}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8372126
Cell. 388 9837745

ASSOCIATIVITÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

$$A(BC) = (AB)C$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia V uno spazio vettoriale e sia W un sottoinsieme non vuoto di V, allora W è un sottospazio vettoriale di V se:

- $0 \in W$
- $\forall w_1, w_2 \in W$, la somma $w_1 + w_2 \in W$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$

Un sottospazio vettoriale non è mai vuoto e contiene sempre lo zero.

COMBINAZIONI LINEARI

una combinazione lineare è un'espressione del tipo:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

SOTTOSPAZIO GENERATO

Siano $v_1 \dots v_m \in V$, il sottospazio generato da $v_1 \dots v_m$ si chiama:

$\text{Span}(v_1 \dots v_m) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m\}$

→ $v_1 \dots v_m$ generano il loro Span;

→ $v_1 \dots v_m$ è un insieme di generatori di W.

INDIPENDENZA LINEARE

$v_1 \dots v_m$ sono lin-ind se: $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_m v_m = 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_m = 0$

→ se l'unica combinazione è il vettore nullo.

BASI

Sia V uno spazio vettoriale, $B = \{v_1 \dots v_k\}$ è una base di V se:

- è un insieme finito e ordinato;
- $V = \text{Span}(v_1 \dots v_k)$, se i vettori generano $\mathbb{R}^m$;
- $v_1 \dots v_k$ sono lin-ind.

BASE CANONICA di $\mathbb{R}^m = \mathcal{E}_m$

- qualsiasi due vettori non proporzionali generano $\mathbb{R}^2$;
- qualsiasi due vettori non proporzionali sono lin-ind;
- qualsiasi due vettori non proporzionali in $\mathbb{R}^2$ formano una base.

DIMENSIONE

V uno spazio vettoriale che ammette delle basi, la dimensione di V è il numero di elementi di una base di V.

→ qualsiasi due basi di V hanno lo stesso numero di elementi:

B_1, B_2 basi di V: $\#B_1 \leq \#B_2$, $\#B_2 \leq \#B_1$ $\Big\}$ $\#B_1 = \#B_2$ → questo numero è la dimensione

COORDINATE

le coordinate di v rispetto alla base B sono i $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

ESTRAZIONE e COMPLETAMENTO

sono due procedimenti per trovare una base a partire rispettivamente da generatori e da vettori lin-ind.

SOMME e INTERSEZIONI DI SOTTOSPAZI

- $W \cap Z$ è un sottospazio
- $W \cup Z$ non è un sottospazio
- $W + Z$ è un sottospazio

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FORMULA DI GRASSMANN

$\dim(W) + \dim(Z) = \dim(W+Z) + \dim(W \cap Z)$

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e W due spazi vettoriali, un'applicazione $f: V \to W$ è lineare se:

- $f(0) = 0$
- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$

un'applicazione è lineare ⟺ rispetta le combinazioni lineari:

$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$

NUCLEO e IMMAGINE

- NUCLEO: $\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ → sottospazio di V
- IMMAGINE: $\mathrm{Im}(f) = \{w \in W : f(v) = w\}$ → sottospazio di W

→ f è <u>iniettiva</u> $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0$

→ f è <u>suriettiva</u> $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$

$\text{Im}(f) = \text{Span}(\underbrace{f(v_1) \dots f(v_m)}_{\text{generatori}})$

<u>TEOREMA DELLA DIMENSIONE</u>

$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$

<u>SOMME DIRETTE e PROIEZIONI</u>

V uno spazio vettoriale, W, Z sottospazi di V t.c. $W+Z=V$ e $W \cap Z = \{0\}$, allora V è decomposto nella somma diretta di W e Z.

→ si chiama somma diretta: $V = W \oplus Z$

$\forall x \in W \oplus Z \ \exists! \ w, z$ t.c. $x = w + z$

$V \to W$ definita $P_W : V \to W$

$V \to Z$ definita $P_Z : V \to Z$

} PROIEZIONI (sono app. lineari)

<u>MATRICE DI UN'APP LINEARE</u>

V, W due sottospazi vettoriali di dimensione finita, B e C, basi di V e W

$A = [f]_B^C$ matrice di f rispetto a B in partenza e C in arrivo

<u>in pratica</u>

se $B = \{v_1 \dots v_m\}$

→ $[f]_B^C = [f(v_1)]_C \cdot [f(v_2)]_C \cdots [f(v_m)]_C$

$[f(v)]_B^C = [f]_B^C \cdot [v]_B$

$[f(v)]_C = A \cdot [v]_B$

<u>CAMBIAMENTO DI BASE</u>

V, W spazi vettoriali

B, C basi di V e W → $[f]_B^C$

B', C' altre due basi → $[f]_{B'}^{C'}$

} che legame c'è?

<u>MATRICE INVERSA DI UNA MATRICE QUADRATA</u>

A matrice quadrata $n \times n$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

→ una matrice $B_{n \times n}$ è <u>inversa</u> della matrice A se:

$AB = BA = I_n$

I_n = matrice identità $= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

L'inversa di A si denota con A^{-1}.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Se abbiamo $Ax = b$, con A una matrice, b un vettore e si vuole sapere x: $x = A^{-1} \cdot b$

- $f - V \to W$ lineare

  B e B' basi di V

  C e C' basi di W

  A e H matrici di cambiamento di base (da B a B' e da C a C')

  $[f]^{C'}_{B'} = H^{-1} \cdot [f]^{C}_{B} \cdot A$

SOMME DI APP. LINEARI E MOLTIPLICAZIONE PER UN λ

V e W spazi vettoriali di dimensione finita,

B base di V, C base di W

$f: V \to W$, $f': V \to W$ due app. lineari:

① $[f + f']^{C}_{B} = [f]^{C}_{B} + [f']^{C}_{B}$

② $[\lambda f]^{C}_{B} = \lambda [f]^{C}_{B}$

COMPOSIZIONE DI APP. LINEARI

V, W, Z spazi vettoriali, B, C, D le rispettive basi:

$f: V \to W$ e $g: W \to Z$ due app. lineari:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \qquad \Rightarrow \qquad V \longrightarrow Z$$

$$B \quad [f]^{C}_{B} \quad C \quad [g]^{D}_{C} \quad D \qquad\qquad B \quad [f \circ g]^{D}_{B} \quad D$$

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \qquad\qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$$[f \circ g]^{D}_{B} = [g]^{D}_{C} \cdot [f]^{C}_{B}$$

$k \times n \qquad k \times m \quad m \times n$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SPAZIO DELLE APP. LINEARI

$\mathcal{L}(V, W)$ è lo spazio di tutte le app. lineari $V \to W$ rispetto alla somma e alla moltiplicazione per un numero λ.

INVERSA DI UN'APP. LINEARE

se $f: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $f^{-1}: W \to V$ è l'inversa

se $f: V \to W$ lineare e invertibile:

① anche la matrice di f è invertibile; $[f]^{C}_{B}$ è INVERTIBILE;

② $[f^{-1}] = \left([f]^{C}_{B}\right)^{-1}$

per studiare un'app. lineare, basta lavorare con le matrici.